NÚMEROS Y CANTIDADES. EL CONTINUO Y LO DISCRETO

Francisco Javier Pérez González

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Septiembre de 2021

Índice

1. Números y cantidades. El continuo y lo discreto

1.1. Los inicios de la aritmética

Estamos tan acostumbrados a *contar* que cuesta trabajo imaginar un mundo sin números. Pero así fue, no creo que nadie lo dude, durante muchísimo tiempo. Incluso en nuestros días se tienen noticias de tribus aisladas que no saben contar más allá de cuatro o cinco objetos; cuando tienen que referirse a una cantidad mayor emplean una expresión que quiere decir “muchos”. Es frecuente también que en los lenguajes primitivos se utilicen palabras distintas para designar números iguales cuando éstos se refieren a diferentes clases de objetos. Poco a poco, conforme los primitivos grupos tribales fueron organizándose en sociedades cada vez más complejas, el proceso de contar colecciones concretas de objetos condujo al concepto de “número abstracto”... !Que a nosotros nos parece tan *natural*! Pero esto fue un largo proceso cuyo desarrollo es el tema de esta lección.

En el tercer milenio a.C. en el antiguo Egipto y en Mesopotamia se inventaron diversos símbolos con significado numérico y sistemas de numeración que se usaron para resolver una variedad de problemas prácticos. Las características más sorprendentes del sistema numérico babilónico son el principio de notación posicional y la base 60. También utilizaron el principio de notación posicional para representar fracciones. Esto les permitió disponer de una aritmética bastante avanzada y utilizarla en muchas situaciones prácticas, especialmente en astronomía. Sin embargo, se limitaban a dar instrucciones verbales de los cálculos a realizar, sin justificarlos de ninguna manera. Los egipcios, por su parte, inventaron un sistema de escritura numérica que usaba la base 10, pero no era posicional, sino aditivo. Usaban un símbolo especial para representar fracciones unitarias (con numerador igual a 1) y las demás fracciones se escribían como suma de estas. Contar, con la ayuda de símbolos numéricos, señala el principio de la aritmética.

Las matemáticas que se desarrollaron en Mesopotamia y en Egipto no fueron más que un conjunto de reglas para resolver problemas de la vida diaria. Casi no hay simbolismo, apenas algún pensamiento consciente sobre abstracciones, ninguna formulación metodológica general y ninguna idea de demostración o incluso de razonamiento plausible que pudiera convencer a alguien de la corrección de un procedimiento o fórmula. No hubo, de hecho, ninguna concepción de ciencia teórica de ningún tipo.

Quien quiera profundizar en estos temas puede consultar [3] y [4].

1.2. Números y medida de magnitudes

Una vez inventados los números, el paso siguiente fue usarlos para *medir magnitudes* tales como longitudes, superficies, volúmenes o tiempos. Este proceso requiere bastante ingenio. Consideremos, para fijar ideas, que queremos *expresar numéricamente* la longitud de un segmento de recta $\overline{AB}$. Lo primero que hay que hacer es elegir una *unidad de medida* que será otro segmento $\overline{OU}$ y comparar ambos. Puede ocurrir que $\overline{AB}$ contenga un número exacto, m, de veces a $\overline{OU}$. En tal caso podemos escribir simbólicamente $\overline{AB}=m\overline{OU}$. El número m representa entonces la *medida* de $\overline{AB}$ respecto de $\overline{OU}$. Lo más frecuente, no obstante, es que $\overline{OU}$ no esté contenido un número exacto de veces en $\overline{AB}$. En tal caso podemos dividir $\overline{OU}$ en un cierto número, n, de partes iguales con la esperanza de que, al tomar como nueva unidad de medida una de estas partes, $\overline{OU'}$, resulte que $\overline{AB}$ contenga un número exacto, m, de veces a $\overline{OU'}$. Cuando esto es así se dice que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{OU}$ son *conmensurables*. Esto quiere decir que *admiten una unidad de medida común*: el segmento $\overline{OU'}$. Podemos escribir $\overline{AB}=m\overline{OU'}$. Por otra parte $\overline{OU}=n\overline{OU'}$. Podemos ahora usar los números m,n para hacernos una idea de cómo es $\overline{AB}$ comparado con $\overline{OU}$; esto es lo que se expresa diciendo que *la razón de* $\overline{AB}$ *respecto de* $\overline{OU}$ *es* $m:n$ (léase m sobre n).

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OU}}=\frac{m}{n}$$

Con el paso del tiempo el símbolo $m:n$ que, en sus orígenes, como acabamos de explicar, representaba la razón de (las longitudes) de dos segmentos conmensurables quedó desprovisto de su significado original y pasó a ser considerado simplemente como un *número* naciendo de esta forma los números *racionales* (cuyo nombre alude, precisamente, a que tales números representan *razones* de segmentos conmensurables).

1.3. Números y cantidades en la antigua Grecia

Los griegos de la antigüedad distinguían entre *"número"* y *"cantidad"* o *"magnitud"*. Para ellos un número era un agregado de unidades. Podemos precisar más. Un número es una multiplicidad que se obtiene por repetición de un individuo – la unidad –, cuyas partes están separadas – son discontinuas – y tienen fronteras bien definidas. Todo esto se expresa diciendo que los números son de naturaleza *discreta*[1]. Por otra parte, los números no tienen sentido si se separan de los objetos materiales o ideales a los que enumeran. Así, "tres árboles" tiene sentido, pero "tres" por sí mismo carece de significado. Es decir, un número es un atributo de un grupo de objetos y carece de autonomía propia.

Una "cantidad" puede ser, entre otras cosas, tiempo, longitud, volumen, velocidad o masa. La característica esencial de la cantidad es su *continuidad*[2]. Una cantidad puede dividirse indefinidamente, pero no está formada por partes separadas que son réplicas de una unidad, sino que

[1]La palabra "discreta" deriva de una raíz latina que significa "separar". De esta misma raíz deriva el verbo "discernir" cuyo significado es reconocer algo como distinto o separado [1].

[2]La palabra "continuo" deriva de una raíz latina que significa "mantener junto" o "cohesionar". Esta misma raíz nos da el sustantivo "continente" con el significado de una extensión de tierra no interrumpida por el mar [1].

sus componentes están unidos entre sí por fronteras comunes: donde acaba uno empieza otro. Por ejemplo, un área plana puede dividirse en trozos que, al estar unidos unos con otros, pierden su singularidad quedando como partes indiferenciadas de un todo. Por otra parte, los matemáticos griegos no estudiaron la cantidad como algo abstracto, para ellos *las cantidades tienen siempre un carácter concreto*: son una cantidad de algo.

El concepto de cantidad estaba estrechamente ligado a la Geometría. Una proporción entre dos segmentos o entre dos áreas planas es una cantidad que a veces puede expresarse con ayuda de números. Cuando dichos segmentos o áreas admiten una unidad de medida común podemos decir que la razón de uno a otro es, por ejemplo, 7 : 10. Pero, para los griegos, 7 : 10 no es un número sino una forma de expresar una cantidad concreta, que podría leerse algo así como “siete partes de diez”. Ellos *solamente consideraban como números los enteros positivos* y ni siquiera consideraban como número a la unidad. La unidad es, eso, “la unidad” de la que están formados los números, pero ella misma no es un número porque no está compuesta de unidades.

1.4. Los pitagóricos y el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables

Volviendo a la situación antes descrita, parece intuitivo que, cualquiera sea el segmento $\overline{AB}$, dividiendo $\overline{OU}$ en un número, n, *suficientemente grande* de partes iguales, podemos conseguir que la nueva unidad de medida, $\overline{OU'}$, esté efectivamente contenida un número exacto de veces en $\overline{AB}$. En otras palabras, parece que dos segmentos cualesquiera deben ser conmensurables. Pues bien, la intuición aquí nos engaña, y ese fue el extraordinario descubrimiento que realizaron los pitagóricos.

Para tratar de encontrar una unidad de medida común para dos segmentos $\alpha_0 = \overline{AB}$ y $\alpha_1 = \overline{CD}$ se procede como sigue. Supuesto que $\alpha_0 > \alpha_1$, quitamos de α_0 tantas veces como podamos α_1 hasta obtener como sobrante un segmento $\alpha_2 < \alpha_1$:

$$\alpha_0 = n_1\alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_2 < \alpha_1$$

Es decir, el segmento α_0 contiene n_1 veces al α_1 y queda un segmento sobrante $\alpha_2 < \alpha_1$. Repetimos el proceso para obtener:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= n_2\alpha_2 + \alpha_3 \qquad \alpha_3 < \alpha_2 \\ \alpha_2 &= n_3\alpha_3 + \alpha_4 \qquad \alpha_4 < \alpha_3 \\ &\vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

Si α_0 y α_1 tienen una unidad de medida común, este proceso termina después de un número finito de etapas, es decir, hay un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_{k-1} = n_k\alpha_k$ de manera que α_k es una unidad de medida común para los segmentos α_0 y α_1. Si el proceso puede continuarse indefinidamente obteniendo en cada etapa segmentos sobrantes cada vez más pequeños $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ es porque los segmentos de partida no son conmensurables.

Observa que si α_0 y α_1 son números enteros, este proceso es el algoritmo de Euclides para la división de enteros y α_k es el máximo común divisor de α_0 y α_1.

Parece ser que fue un pitagórico, Hipaso de Metaponto, quien en el siglo V a.C., al estudiar las propiedades geométricas del pentagrama, descubrió la existencia de los segmentos inconmensurables.

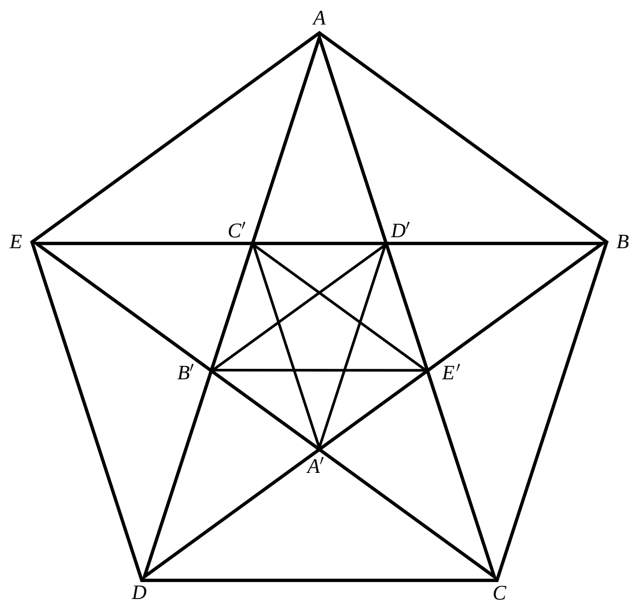

Figura 1. El pentagrama pitagórico

En el pentágono regular $ABCDE$ las diagonales se cortan formando otro pentágono regular $A'B'C'D'E'$. Debido a la simetría, cada lado de un pentágono regular es paralelo a una de sus diagonales. Por tanto los triángulos AED y $BE'C$ tienen sus lados correspondientes paralelos y, en consecuencia, sus ángulos son iguales, por lo que son semejantes. Por tanto:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE'}}$$

Pero $\overline{BE'} = \overline{BD} - \overline{DE'} = \overline{BD} - \overline{AE} = \overline{BD} - \overline{BC}$ pues $\overline{DE'} = \overline{AE}$ por ser lados opuestos de un paralelogramo. Y como $\overline{AE} = \overline{BC}$ y $\overline{AD} = \overline{BD}$, hemos obtenido que:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD} - \overline{BC}}$$

Es decir, en cualquier pentágono regular se cumple que

$$\frac{\text{diagonal}}{\text{lado}} = \frac{\text{lado}}{\text{diagonal} - \text{lado}}$$

Tenemos además:

$$\overline{BD} - \overline{EA} = \overline{BD} - \overline{DE'} = \overline{E'B} = \overline{D'B} = \overline{D'A'}$$

Es decir, la diferencia entre la diagonal y el lado del pentágono mayor es igual a la diagonal del pentágono menor. Y también:

$$\overline{BC} - \overline{D'A'} = \overline{BA'} - \overline{BE'} = \overline{E'A'}$$

Es decir, la diferencia entre el lado del pentágono mayor y la diagonal del pentágono menor es igual al lado del pentágono menor.

Pongamos $\alpha_0 = \text{diagonal} = \overline{BD}$, $\alpha_1 = \text{lado} = \overline{BC}$, $\alpha_2 = \alpha_0 - \alpha_1$. Tenemos que

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Este proceso puede continuarse pues si ahora formamos la diferencia $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$, puesto que α_2 es la diagonal del pentágono menor y α_3 es su lado, tenemos que $\alpha_3 < \alpha_2$ y poniendo $\alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_3$:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$$

Y dicho número es evidentemente el mismo para cualquier pentágono regular, luego:

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$$

Proceso que puede continuarse indefinidamente puesto que las diagonales de cada pentágono regular determinan otro pentágono regular. Esto significa que el proceso que hemos descrito anteriormente:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_0 = 1 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 < \alpha_1 \\
\alpha_1 = 1 \cdot \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_3 < \alpha_2 \\
\alpha_2 = 1 \cdot \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_4 < \alpha_3 \\
\vdots \quad \vdots &
\end{array}$$

no termina nunca y por tanto los segmentos α_0 y α_1 son inconmensurables. Luego la diagonal de un pentágono regular es inconmensurable con el lado.

De la igualdad

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 - \alpha_1}$$

se deduce que $\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Y acabamos de probar que dicho número no es cociente de números enteros, es decir, no es un número racional.

El número $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es uno de los más famosos de las Matemáticas. Se conoce como *razón áurea*. Si en *Google* buscas “razón áurea” (así, con las comillas) te saldrán casi tres mil páginas. Eso en español, porque si buscas en inglés “golden section” obtendrás casi novecientas mil páginas. El poeta Rafael Alberti dedicó un hermoso soneto a la razón áurea.

A la divina proporción

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.
A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.
A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera trasparente.
A ti, divina proporción de oro.

La siguiente demostración, que aparece al final del libro X de los *Elementos* de Euclides, prueba que la diagonal de un cuadrado no es conmensurable con el lado.

En efecto, si $\overline{OU}$ es el lado y $\overline{AB}$ la diagonal, y suponemos que ambos admiten una unidad de medida común $\overline{OU'}$, tendremos que $\overline{OU} = n\overline{OU'}$, y $\overline{AB} = m\overline{OU'}$ para convenientes números naturales m,n. Pero, en virtud del teorema de Pitágoras, $2(\overline{OU})^2 = (\overline{AB})^2$, y deducimos que $2n^2(\overline{OU'})^2 = m^2(\overline{OU'})^2$, por lo que debe ser $2n^2 = m^2$. Veamos que esto lleva a una contradicción. Podemos suponer que m y n no tienen factores comunes (si los tuvieran se los quitamos) y, en particular, m y n *no son ambos pares*. La igualdad $2n^2 = m^2$ nos dice que m^2 es par lo cual implica que también tiene que serlo m. Así podemos escribir $m = 2p$. Sustituyendo en la igualdad anterior y simplificando tenemos que $n^2 = 2p^2$, y de aquí se sigue, al igual que antes, que n tiene que ser par y ésta es la contradicción anunciada.

Suele afirmarse que los pitagóricos pensaban que el *número* era el *fundamento último* de toda realidad aunque ni siquiera Aristóteles tenía claro lo que eso significaba [1]. Puede que los pitagóricos atribuyeran un significado físico a esos *números*, considerados como sustrato universal subyacente a todo, y los entendieran como las *partes últimas indivisibles* de cualquier magnitud, lo que Demócrito y Leucipo llamaron *átomos*. Eso explicaría la profunda crisis que produjo entre los pitagóricos el descubrimiento de las cantidades inconmensurables, pues la existencia de tales cantidades niega directamente la interpretación atomista según la cual cualquier segmento de línea está compuesto de un número finito de *mínimas unidades indivisibles*, pues si esto fuera así está claro que tales unidades mínimas serían una unidad de medida común para cualquier par de segmentos.

El descubrimiento de la inconmensurabilidad fue un logro sin precedentes porque no fue empírico sino puramente teórico, puso de manifiesto que la geometría no es aritmética y que los objetos matemáticos no eran tan simples como se pensaba. De hecho, algunas propiedades que parecían claramente verdaderas (como que dos segmentos siempre admitían una unidad de medida común), resultaban ser falsas. Esta crisis de fundamentos hizo cuestionar la seguridad del método seguido para demostrar las propiedades de los objetos matemáticos, consistente en *hacer ver* o *poner en evidencia* que tales resultados eran necesariamente verdaderos. Y así, en algún momento de la segunda mitad del siglo V a.C., un grupo de matemáticos griegos establecieron un nuevo método para el descubrimiento de la verdad: el *método axiomático-deductivo*, que es esencialmente el mismo que usamos hoy. Se trata de, partiendo de unas pocas verdades evidentes (o axiomas), y a través de una serie de etapas sucesivas muy simples, obtener una cadena de afirmaciones, con la propiedad de que una cualquiera de ellas es verdadera siempre que lo sean todas las anteriores. A las leyes que rigen las formas correctas de pasar de una afirmación a otra de la cadena, se les llamó más tarde *leyes lógicas o deductivas*, y tienen un *carácter formal*, independiente del carácter de verdadero o falso de la afirmación a la que se aplica. A estas cadenas de afirmaciones lógicamente correctas, los griegos las llamaron *demostraciones* [2].

Aristóteles atribuye a los pitagóricos el mérito de haber sido los fundadores en el siglo V a.C. de la matemática como ciencia deductiva. Ellos fueron los primeros en insistir en el razonamiento deductivo como único método de demostración en matemáticas.

Hoy vivimos en un mundo digitalizado: la música que escuchas, las películas que ves, la televisión digital y tantas más cosas de uso cotidiano son, en su esencia, números. Parece que los pitagóricos no estaban del todo equivocados.

Pitágoras, junto con su maestro Tales de Mileto, y también Anaximandro y Anáximenes, sin olvidar a Demócrito y algunos más de los que queda memoria y que tú mismo puedes consultar en *Wikipedia*, todos ellos eran matemáticos y filósofos. ¿Casualidad? Ni mucho menos. Lo que hoy llamamos *Cultura Occidental* nace de una gran blasfemia, a saber, la afirmación de que la realidad puede ser comprendida y explicada racionalmente. Frente a los relatos mitológicos y a los caprichosos dioses imprevisibles, la afirmación insolente de que la inteligencia humana puede desentrañar por sus propios medios el funcionamiento del Universo. Y ¿qué produce la inteligencia humana cuando empieza a indagar sobre la Naturaleza? Matemáticas y Filosofía. Las Matemáticas, por su propia naturaleza, tienen un campo mucho más restringido que el de la Filosofía pero, en cambio, son extraordinariamente eficaces. La palabra griega $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$, que se lee *mathema*, significa *conocimiento*.

> *El Libro del Universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto.*
> Galileo Galilei

1.5. Eudoxo y Euclides. Álgebra geométrica

La existencia de segmentos inconmensurables era un serio problema para el desarrollo de la geometría pues, como dichos segmentos no pueden compararse, no se sabía cómo interpretar su razón. Por ejemplo, un resultado, sin duda conocido por los pitagóricos, afirma que *las áreas de dos triángulos con igual altura están en la misma proporción que sus bases*. ¿Qué sentido tiene esta afirmación si las bases no son segmentos conmensurables? El problema está en que no había una forma de comparar razones entre magnitudes inconmensurables pues el concepto de proporcionalidad pitagórico suponía que las cantidades que se hallan en proporción poseen una medida común. Surge así la necesidad de extender una teoría de la proporción, es decir de la igualdad entre dos razones, que incluyera las razones de cantidades inconmensurables. Esto fue llevado a cabo por un gran matemático Eudoxo de Cnido (*c.* 400 - 347 a.C.) que introdujo la idea de *magnitud continua* o de *cantidad*. Se trata de un concepto que, aunque no se define, permite considerar cantidades tales como longitudes, áreas, volúmenes, ángulos, pesos, tiempo... Eudoxo concebía estas magnitudes de modo geométrico y no les asignaba ningún valor numérico. De esta forma se evitaba el uso de lo que nosotros conocemos como *números irracionales*. Eudoxo definía entonces una razón de tales cantidades y a partir de ella una proporción, es decir, una igualdad de dos razones, que cubría los casos de razones conmensurables e inconmensurables. Puesto que no se utilizaba número alguno para expresar tales razones, los conceptos de razón y proporción quedaban ligados a la geometría lo que condujo al desarrollo de un *álgebra geométrica* cuya característica es tratar los problemas algebraicos por medio de construcciones geométricas. Así fueron resueltas las ecuaciones cuadráticas obteniendo sus raíces como segmentos. Por ejemplo, la fórmula del binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

se expresa como sigue: *Si se divide un segmento, como viene dado, entonces el cuadrado sobre el segmento entero es igual a los cuadrados sobre las partes más dos veces el rectángulo formado por las partes conjuntamente*. Lo que debe entenderse en el sentido de que las áreas geométricamente combinadas de los dos cuadrados y el rectángulo sobre las partes eran igual al área del cuadrado sobre el segmento. No hay que olvidar que para los griegos los únicos números son los naturales, y por tanto una propiedad relativa a cantidades que no se consideran numéricas no puede traducirse algebraicamente usando operaciones como suma y producto que los griegos solamente usaban cuando se trataba de números naturales.

Se desarrollo así una especie de "álgebra geométrica" en la que los números se representaban por segmentos de línea y las operaciones aritméticas fueron sustituidas por construcciones geométricas. Las ecuaciones lineales y cuadráticas fueron resueltas con técnicas geométricas, evitándose así el problema de las magnitudes inconmensurables. De esta forma en las matemáticas griegas el razonamiento geométrico llegó a considerarse como el modelo de razonamiento matemático riguroso. Y así siguió siendo durante más de 2000 años.

Euclides, el matemático más famoso de la Escuela de Alejandría, expone la teoría de Eudoxo en el Libro V de los *Elementos* (300 a.C.) y en ella destacan los siguientes puntos que enunciamos con nuestro simbolismo actual muy diferente de la forma puramente verbal en que fueron formulados ([4], I.4.5).

E1 (*Propiedad arquimediana*) Dadas dos cantidades siempre hay un múltiplo de una de ellas que excede a la otra. Es decir, si es $0 < a < b$ hay algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Observa que esta propiedad impide la existencia de cantidades positivas *infinitamente pequeñas*, los llamados *infinitésimos* de los que hablaremos más adelante.

E2 (*Criterio de igualdad*) Las razones $a : b$ y $c : d$ son iguales si cualesquiera sean los enteros positivos m, n se tiene que

$$ma < nb \Longrightarrow mc < nd, \quad ma = nb \Longrightarrow mc = nd, \quad ma > nb \Longrightarrow mc > nd \tag{1}$$

Esta definición de la proporción no necesita suponer que las cantidades son conmensurables. Al mismo tiempo, permite demostrar todas las proposiciones conocidas sobre proporciones. Volveremos a considerar más adelante este elaborado criterio de igualdad que, desde luego, no aclaraba nada sobre la naturaleza de las cantidades irracionales y ponía de manifiesto la dificultad de reducir a la aritmética el estudio de las mismas.

Los libros VII, VIII y IX de los *Elementos* de Euclides tratan de la teoría de números, esto es, de las propiedades de los números naturales, de las razones entre números naturales y entre magnitudes conmensurables. Su estudio es independiente del Libro V dedicado a las magnitudes continuas propias de la geometría, es decir, Euclides trata separadamente los conceptos de número y magnitud.

Euclides, en el Libro X de los *Elementos*, clasifica las magnitudes inconmensurables en los tipos siguientes (uso, claro está, la notación actual):

$$a \pm \sqrt{b}, \quad \sqrt{a} \pm \sqrt{b}, \quad \sqrt{a \pm \sqrt{b}}, \quad \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

Donde se entiende que a y b son racionales. Se demuestran también identidades -¡todo ello mediante construcciones geométricas!- que con el simbolismo actual se traducen en ([6], pg. 45):

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}}{2}}$$

y

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-b}{2}}$$

La carencia de una teoría aritmética satisfactoria de las cantidades inconmensurables hizo que los matemáticos griegos consideraran la Geometría como una ciencia más general que la Aritmética, puesto que sólo la Geometría podía manipular las razones inconmensurables, y dedicaran sus esfuerzos al estudio de la primera en detrimento de la última. La consecuencia fue que la Geometría se convirtió en la base de casi todas las matemáticas y que durante casi 2000 años, en Europa, hasta al menos el año 1600, casi todo razonamiento matemático riguroso se expresó en lenguaje geométrico.

Quizás el único matemático griego, después de los pitagóricos, que no hizo Geometría sino Aritmética fue Diofanto de Alejandría (c. 214 - 298). En su obra llamada *Aritmética*, de la que se han conservado seis libros de un total de trece, resuelve diversos tipos de ecuaciones algebraicas admitiendo como soluciones números enteros o números fraccionarios positivos, los cuales son considerados por Diofanto como auténticos números y no solamente como proporciones. Otra innovación de Diofanto fue la invención de una notación "sincopada" que constituye el primer ejemplo de simbolismo matemático.

1.6. De la antigua Grecia a la invención del Cálculo

Es sabido que la civilización Romana, tan excelente en tantos aspectos, no destacó en el estudio de las ciencias puras y, en particular, de las matemáticas. La prueba de ello es que no hay ningún matemático Romano digno de mención. No obstante, el sistema de numeración Romano se impuso extendiéndose por todo el Imperio.

Con el triunfo del Cristianismo a finales del siglo IV y la caída del Imperio Romano de Occidente en el año 476, se inicia una larga era de oscurantismo en Europa. En el año 529, el emperador cristiano Justiniano ordenó cerrar la Academia fundada por Platón por considerarla *reducto de enseñanzas paganas de funesta influencia*. La fe y los dogmas no son demostrables lógicamente; absurdas disputas teológicas ocupan el lugar de los estudios de la Naturaleza y la Biblia es la fuente de todo conocimiento. Según San Agustín "Las palabras de las Escrituras tienen más autoridad que toda la inteligencia humana". El racionalismo científico es sospechoso de paganismo. Entonces. . . ¿Para qué pensar?

A diferencia que en Grecia, en la India se había desarrollado principalmente la Aritmética y se conocía el sistema de numeración posicional decimal desde el siglo VI. La primera vez que el cero es tratado como un número de pleno derecho es en la obra *Brahmasphutasiddhanta* del matemático y astrónomo indio Brahmagupta (598 - 670). Esta obra también contenía el principio de la numeración decimal posicional y los métodos de cálculo del álgebra india. En ella se tratan los números negativos en términos muy parecidos a los actuales.

Figura 2. al-Jwarizmi

Figura 3. Fibonacci

La herencia matemática griega pasa a los árabes. La cultura árabe tiene una época de esplendor en los siglos VIII - XII. Al-Mamun (c. 786 - 833), sexto califa de la dinastía Abasida, fundó en Bagdad la Casa de la Sabiduría, una especie de academia con una biblioteca y un observatorio. Allí se tradujeron las obras de los matemáticos y filósofos griegos y tuvieron conocimiento de las matemáticas indias.

El más conocido matemático de la Escuela de Bagdad fue Muhammad ibn-Musa al-Jwarizmi. En su obra *Libro de la Adición y la Sustracción según el cálculo de los hindúes* se describe el sistema decimal posicional y se dan métodos para realizar cálculos aritméticos con dicho sistema.

Leonardo de Pisa (c. 1170 - 1250), más conocido como Fibonacci, aprendió en sus viajes por los países árabes del Mediterráneo a usar los métodos de al-Jwarizmi. Al regresar a Italia, publicó en 1202 el *Liber abaci*, obra que contribuyó a extender el sistema de numeración indo-árabe en Occidente. Estudiando las soluciones de una ecuación de tercer grado, Fibonacci probó que había números irracionales diferentes de los considerados por Euclides. En consecuencia, las técnicas del álgebra geométrica griega no permitían construir todas las cantidades inconmensurables.

Fibonacci dio también una interpretación de los números negativos como pérdidas o deudas, que tuvo bastante buena acogida. Pero todavía deberá pasar mucho tiempo para que los números negativos y el cero sean totalmente aceptados como números.

En este apresurado repaso que estamos dando a la historia de los números, debemos avanzar ahora casi trescientos años para llegar a la siguiente etapa protagonizada por los matemáticos italianos del Renacimiento Niccoló Tartaglia (*c.* 1500 - 1557), Gerolamo Cardano (1501 - 1576), Rafael Bombelli (1526 - 1572) y Ludovico Ferrari (1522 - 1565). Los dos primeros resolvieron la ecuación general de tercer grado de la cual solamente se conocían las soluciones en algunos casos particulares. En la resolución de la cúbica, Cardano tuvo en cuenta las soluciones negativas aunque las llamó "ficticias", y comprobó que la cúbica podía tener tres soluciones.

Figura 4. Cardano

Así mismo, Cardano reconoció por primera vez la existencia de lo que ahora llamamos números complejos (a los que Napier llamó "los fantasmas de los números reales") aunque no los aceptó como posibles soluciones. Por su parte, Bombelli fue el primero en especificar las reglas para sumar y multiplicar números complejos. Usando dichas reglas, probó que podían obtenerse soluciones reales correctas para la cúbica, incluso cuando la fórmula de Tartaglia – Cardano requería el cálculo de raíces de números negativos.

De esta época es también un opúsculo *De Thiende* (1585) ("El Décimo") – 36 páginas – de Simon Stevin (1548 - 1620), ingeniero y matemático nacido en Brujas, en el que se introducen las fracciones decimales y se explica su uso en las operaciones aritméticas. Así mismo, en su obra *LÁrithmetique* (1585) escribió que "no hay números inexplicables, irregulares, irracionales, surds[3] o absurdos", indicando con esto que todos los números debían ser tratados por igual y no hacer distinciones entre ellos como si fueran de distinta naturaleza. Después de Stevin, la idea de que 1 era un número ganó una amplia aceptación.

A pesar de estos avances, los conceptos de "número" y "cantidad" de la antigüedad permanecen sin cambios notables hasta el siglo XVII cuando se desarrolla el simbolismo algebraico.

Lo importante del simbolismo algebraico, no es tanto el uso de los símbolos por sí mismos, sino la elaboración de reglas formales para realizar operaciones de forma simbólica. Por ejemplo, a^2 puede entenderse como una forma simplificada de escribir "el área del cuadrado de lado a". Eso es muy distinto de escribir $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Esto último ya es una manipulación simbólica abstracta en la que las letras a, b no son más que símbolos sin una naturaleza concreta.

[3] La palabra griega "alogos", $\alpha\lambda o\gamma o\varsigma$, usada por los griegos para designar a los números irracionales, también significa "sin discurso" y los árabes la tradujeron por *asamm*, "sordo" o "mudo", que fue traducida al latín por *surdus*.

François Viéte en su *In artem analyticem isagoge* (1591) expone una “logistica speciosa” (*specis*: símbolo), o arte de calcular con símbolos, que fue un paso decisivo para el desarrollo del concepto de cantidad abstracta. No obstante, Viéte consideraba que solamente las cantidades homogéneas podían compararse entre sí. Para entender esto debes tener en cuenta que, desde la antigüedad, el producto de dos cantidades, por ejemplo ab, representaba el área de un rectángulo de lados a y b. De la misma forma, abc representaba el volumen de un ortoedro. Una expresión como $ab+c$ no tenía significado porque no se podía sumar una longitud y un área: no eran cantidades homogéneas.

Figura 5. Viéte

Figura 6. Fermat

Figura 7. Descartes

El siguiente paso definitivo fue el invento de la *geometría analítica* en los años 1630 por Pierre Fermat y René Descartes. La introducción de coordenadas y la representación de curvas por medio de ecuaciones supuso un cambio de perspectiva revolucionario. Piensa que, en la Antigüedad, solamente podían estudiarse aquellas curvas para las que se conocía un método de construcción con regla y compás. Ahora, por primera vez, los objetos geométricos podían estudiarse por medio del simbolismo algebraico, cuando hasta entonces lo usual había sido que el simbolismo algebraico fuera un pálido reflejo de relaciones geométricas.

Una importante creación de Descartes fue el desarrollo de un “álgebra de segmentos”. Para ello, tomando como unidad un segmento u, construyó un segmento (cantidad) c que verificaba la proporción $u:a=b:c$. Dicho segmento c representaba el producto de los dos segmentos (cantidades) a y b. También construyó segmentos que se correspondían con la suma, la diferencia y el cociente de segmentos. De esta manera, cualquier operación con cantidades se corresponde con un segmento, lo que hace que todas las cantidades sean homogéneas. Una expresión como $ab+c$ ya es correcta porque representa un segmento de línea. Esta homogeneización de todas las cantidades conduce al concepto de *cantidad abstracta* desconocido en la antigüedad.

Por esta época ya también los números eran objetos abstractos del pensamiento. Es decir, ya no eran simplemente un atributo del grupo al que contaban sino que se habían convertido en entidades autónomas.

Descartes introdujo el término “imaginario” para referirse a aquellas soluciones de una ecuación polinómica que solamente están en “nuestra imaginación”. Como era costumbre, llamaba “soluciones falsas” a las soluciones negativas. Las “raíces verdaderas” eran las positivas.

A estos progresos en matemáticas hay que agregar los realizados en astronomía y en mecánica por Copérnico (1473-1543), Kepler (1571-1630) y Galileo(1564-1642). Todos ellos se apoyan en métodos experimentales y empíricos cuantitativos para formular sus resultados como Leyes de la Naturaleza de contenido matemático.

Al mismo tiempo, a lo largo de los dos primeros tercios del siglo XVII, se van desarrollando una gran variedad de “métodos infinitesimales”, cuyos precedentes clásicos estaban en Eudoxo y Arquímedes, para resolver multitud de problemas de tipo geométrico y analítico, como cálculo de tangentes a curvas, cálculo de áreas y de valores máximos. Los trabajos de Cavalieri (1598 - 1647) , Wallis (1616 - 1703) y Barrow (1630 - 1677) entre otros muchos, establecieron las bases sobre las que dos grandes genios, Newton (1643 - 1727) y Leibniz (1646 - 1716) desarrollaron el Cálculo Infinitesimal. Más adelante veremos con algún detalle todo este proceso, pues ahora quiero considerar solamente aquellos aspectos del mismo relacionados con las ideas de número y de cantidad.

El Cálculo Infinitesimal son las matemáticas del cambio y del movimiento. Las ideas de magnitud variable y de dependencia entre magnitudes son fundamentales en estas nuevas matemáticas. Surge así el concepto de “variable” que se forma a partir de la idea de cantidad abstracta. En el libro de L’Hôpital *Analyse des infiniment petits, pour líntelligence des lignes courbes* (1696) se lee:

> *Se llaman cantidades variables aquellas que aumentan o disminuyen continuamente, y por contraste cantidades constantes aquellas que permanecen igual mientras las otras cambian.*

Los matemáticos de los siglos XVII y XVIII usan el término “cantidad” para referirse a cantidades generales abstractas, así como a cantidades geométricas concretas, pero siempre se consideran dichas cantidades como continuas. La noción de cantidad continua no se discute, se trataba de un concepto basado en la realidad física. Según Leibniz “Natura non facit saltus”.

La idea de cantidad es más general que la idea de número. Un segmento de línea, por ejemplo, representa una cantidad, pero él mismo no se reduce a números. La idea de número como elemento de un conjunto no existe en el siglo XVIII. Por la misma razón, un segmento no puede “separarse” de sus extremos y siempre los incluye. Los números eran interpretados como medidas. En *Arithmetica universalis* (1707) Newton escribe:

> *Por* número *entendemos no tanto una multitud de cantidades, como la razón abstracta de cualquier cantidad a otra cantidad de la misma clase que tomamos por unidad. Un entero es lo que es medido por la unidad, una fracción, aquello a lo que una parte submúltiplo de la unidad mide, y un surd, aquello que es inconmensurable con la unidad.*

Esta interpretación de los números se corresponde con la consideración de las Matemáticas en los siglos XVII y XVIII como una Ciencia de la Naturaleza y, en consecuencia, los objetos matemáticos deben estar vinculados, directa o indirectamente, con la realidad física. Por ello, solamente se consideran como "verdaderos números" los que representan el resultado de una medida: los enteros y los racionales positivos. Los demás números (negativos, el 0 y los imaginarios) son necesarios y útiles para los cálculos, pero no son considerados "verdaderos números" son "ficticios".

Los números irracionales positivos, aunque no son números en sentido estricto, tampoco son propiamente "ficticios", porque pueden representarse por un segmento y sirven para medir cantidades geométricamente especificadas. Los racionales e irracionales positivos son llamados "números reales" en oposición a los números imaginarios.

Los números empiezan a considerarse como entidades simbólicas sobre las que se opera con unas reglas establecidas (pero que no pueden ser libremente definidas). Por ejemplo, según Euler, $\sqrt{12}$ es un número que multiplicado por sí mismo es igual a 12, y esto es una definición simbólica de $\sqrt{12}$.

El desarrollo inicial del Cálculo, en el último tercio del siglo XVII, se basa en ideas vagas e imprecisas como "cantidad evanescente", "razón última" o "infinitamente pequeño". El uso de los "infinitésimos", considerados como cantidades que, sin ser nulas, son más pequeñas que cualquier cantidad positiva imaginable, es característico de las técnicas del Cálculo.

Después de la invención del Cálculo el objetivo era usarlo para descubrir nuevos resultados. Al principio, nadie se preocupó mucho por la corrección matemática de los procedimientos empleados. La confianza en dichas técnicas descansaba en su extraordinaria eficacia para resolver multitud de problemas. Sin embargo, a finales del siglo XVIII, el uso continuado de los infinitésimos, que nadie sabía explicar, unido a la incomprensión que se tenía de los números irracionales y de los procesos de convergencia, propiciaron estudios críticos de los conceptos básicos del Cálculo, que acabaron llevando a una nueva formulación de los mismos mucho más formal y rigurosa, según los criterios actuales, pero también mucho menos intuitiva.

1.7. Infinitésimos y el continuo numérico

Estás leyendo *ahora mismo* estas palabras. Tienes un sentido preciso del "ahora", al igual que del "pasado" y del "futuro". Tenemos una percepción muy clara del "flujo del tiempo". Percibimos el tiempo como un continuo: lo que separa dos instantes de tiempo es . . . tiempo. Dado un pequeño intervalo de tiempo, digamos un segundo, siempre podemos concebir otro intervalo más pequeño todavía, medio segundo o una cienbillonésima parte de un segundo. ¿Has pensado alguna vez hasta dónde es posible *dividir el tiempo*? Si aceptamos que el "instante" es lo que no tiene duración, parece difícil aceptar que el tiempo esté formado por instantes. ¿Debemos considerar entonces que hay una *unidad mínima* de tiempo, todo lo pequeña que queramos, pero que no se reduce a un instante? Estarás de acuerdo en que esa unidad mínima de tiempo sería algo así como una unidad de tiempo "infinitesimal". ¿Cuántas unidades infinitesimales de tiempo caben en un minuto? ¿Un número finito? ¿Una cantidad infinita?

En el párrafo anterior podemos cambiar la palabra "tiempo" por "espacio" e "instante" por "punto" y llegaremos a los problemas derivados de la "infinita divisibilidad" del espacio. Tiempo y espacio son ejemplos de "continuo". Una entidad continua, un *continuo*, es lo que no está roto ni separado ni tiene huecos, lo que puede ser indefinidamente dividido sin que pierda su naturaleza. Por ejemplo, un volumen de líquido, un segmento, un movimiento o, los ejemplos más inmediatos, el espacio y el tiempo.

Lo que relaciona espacio y tiempo es el movimiento. El Cálculo es la matemática del movimiento, del cambio continuo. El Cálculo se apoya en la geometría analítica de Descartes y Fermat y en la Aritmética. La Geometría se ocupa de cantidades continuas; la Aritmética de lo discreto. El Cálculo es la síntesis de lo "discreto" y lo "continuo". Los "infinitésimos", las cantidades infinitesimales, son el puente entre lo discreto y lo continuo.

Los procedimientos del Cálculo, límites, convergencia, continuidad, pueden describirse como matemáticas del *continuo numérico*. La expresión "continuo numérico" puede parecer un oxímoron, esto es, una combinación de dos palabras con significados opuestos y, en cierto sentido, es así. Los números sirven para contar grupos de cosas de igual naturaleza; por ejemplo árboles, o lo que quiera que sea, pero cada una de ellas con su propia individualidad, separadas entre sí, cosas que no tiene sentido dividir porque al hacerlo pierden su naturaleza. Todo esto se resume diciendo que los números tienen un carácter *discreto*. Los números siempre fueron considerados como lo opuesto del continuo.

La oposición continuo – discreto ha ocupado a los filósofos desde hace 2500 años y tiene como primeros representantes respectivos a Parménides (*c.* 510 - 450 a.C.) y a Demócrito (*c.* 460 - 370 a.C.).

Parménides, el filósofo más famoso de la Escuela Eleática, afirma en su hermoso poema *Sobre la Naturaleza*, que lo que Es, el Ser, es uno, ingénito, homogéneo, continuo, indivisible e inmutable. Este concepto del Ser excluye toda posibilidad de nueva generación de seres o sustancias y, por tanto, el cambio y el movimiento son mera ilusión, porque ambos presuponen que lo que no es pueda llegar a ser.

Demócrito es el representante más conocido de la Escuela Atomista cuyo materialismo se opone al idealismo de la Escuela Eleática. Demócrito mantiene que el universo está compuesto de pequeños corpúsculos invisibles, los "átomos", que pueden poseer diferentes formas y extensiones y que por movimientos y combinaciones diversas en el vacío engendran la totalidad de lo existente.

Zenón de Elea, discípulo de Parménides, es famoso por sus *aporías*, en las que trata de probar que tanto si el espacio o el tiempo son infinitamente divisibles, como si no lo son, el movimiento no existe o es imposible. Las aporías de Zenón son un extraordinario desafío, al que filósofos y matemáticos han dado diversas respuestas, sin que aún hoy se tenga conciencia clara de haberlas podido explicar de forma totalmente convincente.

Según Aristóteles, los atomistas preguntaban, en el supuesto de que una magnitud sea infinitamente divisible, qué es lo que quedaba de ella después de haberla sometido a un proceso de división exhaustivo. Y decían, si queda algo como polvo, es porque todavía no se ha completado el proceso de división, y si lo que queda son puntos o algo sin extensión, ¿cómo es posible recomponer una magnitud extensa con algo que no tiene extensión? Según ellos, la respuesta eran los átomos. La palabra griega "átomos" significa "lo que no puede dividirse", por tanto, la Escuela Atomista negaba la infinita divisibilidad de la materia y afirmaba que cualquier magnitud contiene elementos indivisibles.

De la oposición continuo – discreto siguieron ocupándose los filósofos de la Antigüedad, Platón (*c.* 427 - 347 a.C.), Aristóteles (384 - 322a.C.), Epicuro (341 - 270 a.C.); y de la Edad Media Duns Scoto (*c.* 1266 - 1308), Guillermo de Ockham (*c.* 1280 - 1349), Nicolás de Cusa (1401 - 1464), entre otros. Éste último, en una supuesta demostración de la cuadratura del círculo, consideró una circunferencia como un polígono regular de infinitos lados. La idea de considerar que una curva está formado por infinitos segmentos infinitesimales de línea recta fue usada, entre otros, por Kepler, Galileo y Leibniz y está recogida en el libro de Guillaume de L'Hôpital *Analyse des Infiniment Petits pour lÍntelligence des Lignes Courbes* (1696) al cual ya nos hemos referido anteriormente.

A finales del siglo XVII, con el invento del Cálculo, resurgió la oposición entre lo continuo y lo discreto, esta vez centrada en el concepto de cantidad infinitesimal. Algunos consideraban los infinitésimos como algo real, infinitamente pequeño, parecido a los átomos de Demócrito, salvo que ahora su número era infinito. La integración se consideraba como una suma infinita de estos infinitésimos. Una diferencial de una cantidad variable era un incremento infinitesimal de dicha variable, y un cociente o una razón de diferenciales "en el momento en que se anulan", lo que Newton llamaba *cantidades evanescentes*, era lo que ahora llamamos una derivada, y Newton llamaba una *fluxión*.

El uso de los infinitésimos en el Cálculo demostraba ser muy eficaz y, aunque a algunos, como al mismo Newton, les hubiera gustado evitarlo, lo cierto es que no se sabía bien cómo hacerlo. Lo peor de todo, no es que el mero concepto de infinitésimo sea de por sí difícilmente sostenible, sino la forma en que los infinitésimos se manejaban en los cálculos. Podemos destacar dos características.

- Con los infinitésimos podía operarse como con cantidades finitas no nulas y, en particular, podía dividirse por ellos.

- Los infinitésimos podían ser tratados como cantidades nulas. Así, si x es una cantidad positiva y o un infinitésimo, entonces $x+o=x$.

Dependiendo del tipo de cálculo eran tratados de una forma u otra. Además, había infinitésimos de primer orden despreciables frente a cantidades finitas; de segundo orden que eran despreciables frente a los de primer orden, y así sucesivamente. Para acabar de empeorar las cosas, los infinitésimos no respetaban la propiedad arquimediana, pues el producto de cualquier cantidad finita por un infinitésimo seguía siendo un infinitésimo.

Ejemplo. Un ejemplo típico es el cálculo de la diferencial de un producto de dos cantidades x e y. Se razonaba como sigue. Cuando x cambia a $x+\mathrm{d}x$, y cambia a $y+\mathrm{d}y$, por lo que xy se transforma en

$$(x+\mathrm{d}x)(y+\mathrm{d}y)=xy+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

por lo que la diferencial de xy es $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, pero como $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ es una cantidad infinitamente pequeña con respecto a los otros términos, se sigue que la diferencial de xy es $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$.

Ejemplo. Veamos otro ejemplo típico. Consideremos dos cantidades x, y relacionadas por $y-x^3=0$. Cuando x cambia a $x+\mathrm{d}x$, y cambia a $y+\mathrm{d}y$, por lo que

$$0=y+\mathrm{d}y-(x+\mathrm{d}x)^3=y+\mathrm{d}y-x^3-3x^2\mathrm{d}x-3x(\mathrm{d}x)^2-(\mathrm{d}x)^3$$

Teniendo en cuenta que $y-x^3=0$, deducimos:

$$\mathrm{d}y=3x^2\mathrm{d}x+3x(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}x)^3$$

Dividiendo por $\mathrm{d}x$ la igualdad obtenida resulta:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2+3x\mathrm{d}x+(\mathrm{d}x)^2$$

Y como $3x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2$ es infinitamente pequeño respecto de $3x^2$, concluimos que $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$.

En lenguaje actual, lo que hemos hecho es calcular la derivada de la función $f(x) = x^3$. Y… ¡el resultado es correcto! A pesar de que hemos dividido por una cantidad que después hemos hecho igual a cero.

En 1734 el filósofo George Berkeley (1685 - 1753) publicó una obra cuyo título es *El analista, o discurso dirigido a un matemático infiel, donde se examina si el objeto, principios e inferencias del análisis moderno están formulados de manera más clara, o deducidos de manera más evidente, que los misterios de la religión y las cuestiones de la fe*. En dicha obra Berkeley, que fue obispo anglicano de Cloyne, hace una crítica de los fundamentos del Cálculo que tuvo una gran influencia. Afirmaba Berkeley que si se acepta que el Cálculo puede alcanzar soluciones exactas por medio de razonamientos erróneos, entonces debe admitirse que la fe puede alcanzar la verdad por vías místicas. Es famoso su comentario:

> *¿Qué son las fluxiones? Las velocidades de incrementos evanescentes. Y ¿qué son estos mismos incrementos evanescentes? Ellos no son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni siquiera son nada. ¿No las podríamos llamar los fantasmas de las cantidades desaparecidas?*

Los embrollos en que andaban metidos los matemáticos se reflejan en la novela de Jonathan Swift *Los viajes de Gulliver* (1726) donde aparecen los diminutos enanos de Lilliput y los enormes gigantes de Brobdingnag, y en la narración corta *Micromegas* (1752) de Voltaire.

La realidad es que los matemáticos del siglo XVIII, y hasta bien entrado el siglo XIX, estaban mucho más interesados en desarrollar y aplicar las técnicas del Cálculo, que en ocuparse de problemas de fundamentos. Entre los principales matemáticos de esta época hay que citar a Leonard Euler (1707 - 1783), Jean d'Alembert (1717 - 1783), Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827), Joseph Fourier (1768 - 1830), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). El espíritu de los tiempos, el Siglo de las Luces, queda bien reflejado en la siguiente frase.

> *Todos los efectos de la naturaleza son tan sólo las consecuencias matemáticas de un pequeño número de leyes inmutables.* Laplace

En el primer tercio del siglo XIX, el ideal de Newton de "someter los fenómenos de la Naturaleza a las leyes matemáticas", podía considerarse esencialmente realizado.

1.8. El triunfo de Pitágoras

Llegamos así al siglo XIX que, en cuanto a matemáticas se refiere, ha sido llamado el Siglo del Rigor. Veamos cómo se entendían en los primeros años de dicho siglo los conceptos básicos del Cálculo.

- Concepto de función. No existía tal como lo entendemos en la actualidad. En vez de funciones, se consideraban relaciones entre variables, es decir, ecuaciones. Las correspondencias entre variables se interpretaban en términos geométricos. No existía la idea del dominio de una variable.

- Concepto de continuidad. El concepto de continuidad puntual no había sido siquiera formulado matemáticamente. La idea de Euler de función continua, como aquella que está definida por una única expresión analítica, era todo lo que había.

- Concepto de límite. Solamente se tenían algunas ideas confusas agravadas por el uso de los infinitésimos. Los infinitésimos empezaban a considerarse como variables con límite cero.

- Concepto de número. La idea de cantidad abstracta variable, a la que podían asignarse valores concretos, no había experimentado cambios notables en casi un siglo. Los números complejos ya eran aceptados, gracias a los trabajos de Euler y, sobre todo, de Gauss, pero seguía sin tenerse una idea clara de los números irracionales, y prevalecía una interpretación geométrica de los mismos.

Esta situación iba a cambiar gracias principalmente a los trabajos de Bernad Bolzano (1781 - 1848), Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) y Karl Weierstrass (1815 - 1897) de los que nos ocuparemos al estudiar la formalización del concepto de límite. Ahora quiero detenerme solamente en la evolución de la idea de número real. A los tres matemáticos citados hay que agregar los nombres de Richard Dedekind (1831 - 1916) y George Cantor (1845 - 1918), fueron ellos quienes desarrollaron la teoría de los números reales. Es lógico preguntarse por qué esto no se hizo antes. Pueden darse varias razones para ello.

- En el siglo XVIII las matemáticas son consideradas una Ciencia de la Naturaleza. Las teorías matemáticas deben reflejar la realidad física. Las matemáticas son una herramienta para formular y descubrir las Leyes de la Naturaleza. Las teorías matemáticas no se inventan, se descubren.

- Los números reales estaban asociados con magnitudes y se interpretaban geométricamente. Eran algo dado en la realidad física. A los matemáticos del siglo XVIII no les pareció necesario dar una definición matemática de los mismos.

- Observa que para precisar un número como $\sqrt{2}$ debes dar todas sus cifras decimales en su orden, es decir, un vector de infinitas componentes. Fíjate también que la condición dada por Eudoxo (1) para comparar razones inconmensurables hace intervenir a *todos* los números naturales. Esto no es casual. La idea de número irracional lleva consigo asociada la de infinito. Hasta que no se elaboraron los fundamentos de una teoría matemática del infinito, no pudo desarrollarse una teoría satisfactoria de los números reales.

En el siglo XVIII las definiciones matemáticas eran descriptivas; no creaban objetos matemáticos sino que describían algo que se suponía debía imitar una realidad externa. Por la misma razón, no podían inventarse reglas para operar con los objetos matemáticos. Las reglas había que descubrirlas, pero no podían elegirse libremente. Se consideraba que la Naturaleza imponía unas normas que las Matemáticas de alguna manera debían imitar, no se era libre para inventar una teoría matemática. La idea de una Matemática como juego lógico formal era algo impensable en el siglo XVIII.

La idea que los matemáticos tenían de su Ciencia cambió de forma radical como consecuencia de la invención en el siglo XIX de las geometrías no euclídeas por Janos Bolyai (1802 - 1860) y Nikolai I. Lobachevsky (1792 - 1856). Con la aparición de las geometrías no euclídeas, se han ido introduciendo en matemáticas nuevos conceptos y desarrollos que no tienen una contrapartida inmediata en el mundo real. Quedó claro a partir de entonces que las matemáticas no son una Ciencia de la Naturaleza, que la definición usual de las matemáticas como la ciencia que estudia la cantidad y la forma es inadecuada, y pasó a considerarse que la matemática es la ciencia que obtiene conclusiones lógicas de sistemas axiomáticos. Las matemáticas son, pues, una ciencia puramente deductiva. Una teoría matemática es un conjunto de axiomas que contienen ciertos términos indefinidos, y un sistema de reglas de inferencia lógica. El papel que juegan las definiciones en una teoría matemática consiste en crear nuevos objetos matemáticos y precisar su significado en dicha teoría. Todos los objetos que se estudian en una teoría matemática, o bien son términos indefinidos de dicha teoría o son objetos creados por medio de definiciones que remiten a los axiomas. En el XVIII los números reales son algo dado y externo que las matemáticas deben explicar, al final del XIX los números serán algo completamente diferente.

La idea de número real es el soporte de otras ideas básicas del Cálculo como las de continuidad y límite. Los procesos de convergencia dependen de la propiedad de completitud de los números reales. Por todo ello, los matemáticos eran cada vez más conscientes de que los progresos del Cálculo dependían de un mejor conocimiento de los mismos.

1.9. Cortaduras de Dedekind

A mediados del siglo XIX no era posible demostrar algunos resultados básicos del cálculo; por ejemplo, que toda función creciente y acotada tiene límite, o el teorema del valor intermedio para funciones continuas. Ello se debía a que faltaba codificar matemáticamente una propiedad fundamental de los números reales, la que ahora llamamos *completitud* y entonces se llamaba *propiedad de continuidad*. En 1872 se publicaron dos trabajos, uno de Cantor y otro de Dedekind, en los que, tomando como punto de partida el sistema de los números racionales, cada autor desarrollaba una construcción matemática de los números reales. Nos vamos a ocupar aquí del trabajo de Dedekind, titulado *Continuidad y números irracionales*. En dicho trabajo, Dedekind manifiesta su propósito de reducir los números reales a la aritmética, eliminando así todo contenido geométrico en la idea de número real. Para explicar lo que él hizo vamos a partir de la intuición de una recta.

Figura 8. Dedekind

Una recta es un ejemplo claro de continuidad. Elegido un punto como origen y un segmento como unidad, podemos hacer corresponder a cada número racional un punto de esa recta. Ya hemos visto, al hablar de las magnitudes inconmensurables, que los números racionales no agotan todos los puntos de la recta; cualquier punto que corresponda con un segmento de longitud inconmensurable con la unidad elegida no puede ser representado por un número racional, es decir, en la recta racional hay "huecos". Por tanto, los números racionales no son suficientes para describir numéricamente "el continuo". Se pregunta Dedekind:

> *¿En qué consiste esta continuidad? Todo depende de la respuesta a esta pregunta, y solamente a través de ella obtendremos una base científica para la investigación de todos los dominios continuos. Con vagas observaciones sobre la unión sin rotura de las partes más pequeñas, obviamente nada se gana; el problema es indicar una característica precisa de la continuidad que pueda servir como base para deducciones válidas. Durante largo tiempo he meditado sobre esto en vano, pero finalmente he encontrado lo que pretendía.*

Dedekind se dispone a revelar el secreto, pero como su idea además de ser genial es muy sencilla, previene al lector con esta observación.

> *Muchos de mis lectores quedarán grandemente disgustados al saber que por esta vulgar observación se revela el secreto de la continuidad.*

¿Cuál es esa *vulgar* observación? Vamos a explicarla. Todo punto en una recta R la divide en dos partes disjuntas, la parte A, formada por los puntos de la recta que están a su izquierda, y la parte B, formada por los puntos de la recta que están a su derecha. El propio punto podemos incluirlo bien en A o en B. Dice Dedekind:

> *He encontrado la esencia de la continuidad en el recíproco, es decir, en el siguiente principio:*"Si todos los puntos de la recta se dividen en dos clases tales que todo punto de la primera clase queda a la izquierda de todo punto de la segunda clase, entonces existe un, y sólo un punto, que produce esta división de todos los puntos en dos clases, esta escisión de la línea recta en dos partes."

Las ideas geniales, que además son sencillas, son doblemente geniales. Igual que el tiempo es continuo porque entre dos instantes de tiempo solamente hay tiempo, la recta es continua porque entre dos puntos de ella solamente hay puntos de la misma recta. Es esta la idea que Dedekind ha sabido expresar matemáticamente de una forma insuperable. Para entenderla un poco mejor, vamos a considerar el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales como puntos de una recta en la que hemos elegido un origen y una unidad, la recta racional.

Definición. Una *cortadura* de $\mathbb{Q}$ es un par (A,B), donde A y B son conjuntos no vacíos de números racionales tales que $\mathbb{Q} = A \cup B$, y todo número de A es menor que todo número de B y A no tiene máximo.

Todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ produce una cortadura dada por

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : r \geqslant x\}$$

Pero en la recta racional hay muchas cortaduras que no están producidas por números racionales. Es un sencillo ejercicio probar que los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant 0 \text{ o } x^2 < 2\}, \ B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ y } x^2 \geqslant 2\}$$

definen una cortadura de $\mathbb{Q}$ que no está producida por ningún número racional. De hecho, si te imaginas la recta racional dentro de la recta real, y tomas un número α que sea irracional, los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \alpha\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : r > \alpha\}$$

Definen una cortadura de $\mathbb{Q}$ que no está producida por ningún número racional. Es decir, considerando $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$, vemos que cada cortadura de $\mathbb{Q}$ está determinada por un punto que puede ser racional o irracional.

Pero claro, *está prohibido usar la recta real cuando lo que queremos es justamente construirla a partir de* $\mathbb{Q}$. ¿De dónde sacamos los números reales si todo lo que tenemos son los racionales? Esta es la idea genial de Dedekind.

Definición. Un número real es una cortadura de $\mathbb{Q}$.

El conjunto de todos los números reales se representa por $\mathbb{R}$. Observa el papel que desempeñan las definiciones en una teoría matemática: crean nuevos objetos de la teoría. La definición anterior dice lo que es un número real en términos exclusivamente de números racionales. Vuelve ahora a leer la definición de Eudoxo (1) para la igualdad de razones inconmensurables. ¡Lo que dice (1) es que dos razones inconmensurables son iguales si producen una misma cortadura en $\mathbb{Q}$! Salvo esto, ningún otro parecido hay entre Dedekind y Eudoxo.

Los números racionales se construyen a partir del conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros, y éstos se obtienen fácilmente a partir de los naturales. Dedekind y Giuseppe Peano establecieron una base axiomática para el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Ya ves, al final, Pitágoras ha regresado: todo es número.

1.10. Métodos axiomáticos y métodos constructivos

Supongo lo que estás pensando: "¡Vaya definición extraña de número real! Ahora resulta que un número es una cortadura... ¡nada menos que dos conjuntos infinitos de números!". Vayamos poco a poco.

- Es una definición operativa, es decir, permite definir la suma y el producto de números reales, así como la relación de orden y demostrar que verifican las propiedades que definen un cuerpo ordenado completo. Además, todo esto se hace de forma sencilla aunque laboriosa. Si tienes curiosidad, puedes consultar el Capítulo 28 de [5].

- Lo importante de la definición es que define los números reales solamente usando los números racionales. Es decir, resuelve un problema de *existencia* en sentido matemático.

Dos cuerpos ordenados completos son matemáticamente indistinguibles pues se demuestra que entre ellos hay un isomorfismo creciente. Por tanto, *los números reales son el único cuerpo ordenado completo*. La demostración de que *existe* un cuerpo ordenado completo y es *único* es larga, laboriosa y depende de las hipótesis de partida.

Lo más usual es dar por conocidos los números racionales y a partir de ellos *construir* $\mathbb{R}$. Esto puede parecer extraño a primera vista, porque si sólo conocemos los números racionales, ¿de dónde van a salir los demás? De eso precisamente se ocupan los *métodos constructivos* (Cantor, Dedekind). Por ejemplo, si partimos de la intuición de que con los números reales se pueden representar *todos* los puntos de una recta, es claro que un número real queda determinado de forma única por los números racionales menores que él. Esta idea conduce a la *definición* de número real dada por Dedekind. La definición de Cantor es mucho menos intuitiva pues, para Cantor, un número real es una clase de infinitas sucesiones de números racionales que cumplen una cierta propiedad.

Es posible probar, partiendo de estas definiciones, que el conjunto de los números reales así definidos puede dotarse de una estructura algebraica y de orden de manera que satisface los axiomas de un cuerpo ordenado completo. Este proceso es bastante laborioso; además se corre el peligro de centrar la atención en el proceso en sí mismo olvidándose de lo que se persigue. Por otra parte, las definiciones de Dedekind o de Cantor no son las únicas, hay otras definiciones de número real. Pensarás que esto no es serio. ¿Qué está ocurriendo aquí? Ocurre, sencillamente, que cualquier definición de los números reales a partir de los racionales, esto es, cualquier método constructivo de $\mathbb{R}$, tiene su razón última de ser en el *problema de la existencia*: ¿puede ser construido un cuerpo ordenado completo a partir de los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos? Pues bien, la respuesta es que sí; además, y esto es fundamental, matemáticamente, en un sentido preciso, dicho cuerpo *es único*.

Da igual, por tanto, cómo se interprete lo que es un número real, lo importante es que de cualquier forma que lo hagamos, los axiomas que definen un cuerpo ordenado completo determinan totalmente sus propiedades matemáticas. Es decir, una vez que sabemos que hay un único cuerpo ordenado completo, lo mejor es olvidar cualquier posible interpretación de cómo sean sus elementos (ningún matemático piensa que $\sqrt{2} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \ \text{ o } \ x^2 < 2\}$) y quedarnos exclusivamente con las propiedades de los mismos. Esto es precisamente lo que se hace con el método axiomático que es la forma más conveniente de iniciarse en el estudio de los números reales.

Para más detalles sobre la fundamentación del sistema de los números reales puede consultarse el capítulo 41 de [4].

1.11. El regreso de los pequeñitos

Con la reducción del continuo a lo discreto, parece que finalmente ha triunfado la Aritmética. Pero la historia continua. Por una parte, los números naturales tuvieron un reinado efímero, pues fueron esencialmente reducidos a pura lógica como consecuencia del trabajo pionero de Gottlob Frege. Por otra parte en 1960, el lógico Abraham Robinson (1918 - 1974) construyó un sistema numérico, los *hiperreales*, un cuerpo totalmente ordenado no arquimediano, que contiene una copia de los números reales y en el que hay números infinitamente pequeños y números infinitamente grandes. Las técnicas desarrolladas por Robinson se conocen con el nombre de *Análisis No Estándar*. Con dichas técnicas pueden probarse los resultados fundamentales del Cálculo de forma intuitiva y directa al estilo de Newton y Leibniz. ¡Están aquí! ¡Los infinitésimos han regresado!

1.12. Otros números: complejos, cuaterniones, octoniones.

Acabamos de recorrer el largo camino que lleva del descubrimiento de las cantidades inconmensurables hasta la formalización matemática del concepto de número real. Pero, además de los naturales, enteros, racionales e irracionales, hay otros números, algunos bien conocidos, otros no tanto.

Los números que hoy llamamos "complejos" fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1672) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596-1650) quien afirmó que *"ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación"* y acuñó el calificativo *"imaginarias"* para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución de un problema resulta ser un número complejo se interpreta esto como que el problema no tiene solución. Para Leibniz *"el número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser."*

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema bien cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se preocuparon de la *"naturaleza"* de los mismos; no se preguntaron "¿qué es un número complejo?", sino que se dijeron *"a ver, para qué sirven, qué puede hacerse con ellos"*. Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el resultado conocido como *Teorema Fundamental del álgebra* que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que *también son números complejos*.

El término, hoy usado de *"números complejos"* se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra "i" que Euler (1707-1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la

Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

Los números complejos son una herramienta básica de cálculo. Son especialmente útiles para trabajar con funciones sinusoidales, y por eso se hace uso constante de ellos siempre que representamos una señal por medio de dichas funciones, y no hay que olvidar que ése es el propósito básico de los *"métodos de Fourier"*. La *Transformada de Fourier Discreta*, una herramienta fundamental en el tratamiento digital de señales, toma valores complejos. Las *transformadas de Fourier y de Laplace* son funciones complejas. La *transformada z*, al igual que otras transformadas de uso frecuente, se define como una serie de números complejos. La función exponencial compleja desempeña un papel fundamental en el estudio de los sistemas LTI (sistemas lineales invariantes en el tiempo) y también en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales. Los formatos digitales más frecuentes de audio e imagen son, respectivamente, MP3 y JPG. Cuesta trabajo imaginar cómo sería Internet sin estos formatos. Lo que quizás no sepas es que la codificación MP3 y la JPG se llevan a cabo con algoritmos que usan números complejos. El hecho, por extraño que pueda parecer, es que las principales herramientas para trabajar con todo tipo de señales (audio, vídeo, voz, imagen,...) son complejas.

El Teorema Fundamental del álgebra nos dice que el procedimiento de ir ampliando el campo numérico con el objetivo de que toda ecuación polinómica tenga soluciones alcanza su cima con los números complejos y que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números. Pero podemos preguntarnos si, al igual que hemos definido una multiplicación en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ para obtener $\mathbb{C}$, es posible hacer algo *similar* en $\mathbb{R}^n$ de manera que resulte una estructura a cuyos elementos podamos llamar *números*. Para ello tendremos que ponernos de acuerdo en qué cosa queremos que sea un *número*. Lo que está claro es que, sean lo que sean, los números se deben poder sumar y multiplicar; la adición debe tener las propiedades usuales, la multiplicación debe ser distributiva respecto de la adición y todo número distinto de cero debe tener un inverso. La codificación de estas propiedades conduce al concepto de *álgebra real no asociativa de división*: un espacio vectorial real, A, dotado de una aplicación bilineal $A\times A\to A$, $(a,b)\mapsto ab$, llamada *producto*. Debemos exigir que A tenga unidad, es decir, que haya un elemento $u\in A$, $u\neq 0$, tal que $au=ua=a$ para todo $a\in A$. Además, todo elemento $a\neq 0$ debe tener un inverso $b\in A$ tal que $ab=ba=u$.

Claramente, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ (con el producto complejo) son ejemplos de álgebras reales de división cuyo producto tiene las propiedades asociativas y conmutativas.

En $\mathbb{R}^4$ pongamos $\mathbf{1}=(1,0,0,0)$, $\mathbf{i}=(,1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,0,1,0)$, $\mathbf{k}=(0,0,0,1)$ y definamos un producto en el que $\mathbf{1}$ hace de unidad y:

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=-\mathbf{1},\quad \mathbf{ij}=-\mathbf{ji}=\mathbf{k},\quad \mathbf{jk}=-\mathbf{kj}=\mathbf{i},\quad \mathbf{ki}=-\mathbf{ik}=\mathbf{j}$$

extendiéndolo por bilinealidad a $\mathbb{R}^4$. Es fácil probar que:

$$(a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k})(a-b\mathbf{i}-c\mathbf{j}-d\mathbf{k})=(a^2+b^2+c^2+d^2)\mathbf{1}$$

De esta forma obtenemos un álgebra real de división de dimensión 4 llamada el álgebra de los **cuaterniones** de Hamilton que se representa por $\mathbb{H}$. El producto de dicha álgebra es asociativo pero claramente no es conmutativo.

Podemos representar los elementos de $\mathbb{R}^8$ en la forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} z & \mathbf{w} \\ -\overline{\mathbf{w}} & \overline{z} \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C},\ \mathbf{w} \in \mathbb{C}^3 \right\}$$

donde, para un vector $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$, $\overline{\mathbf{w}} = (\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3})$. Se entiende que dicha matriz representa el vector de $\mathbb{R}^8$ cuyas coordenadas son

$$\big(\mathrm{Re}(z), Im(z), \mathrm{Re}(w_1), \mathrm{Im}(w_1), \mathrm{Re}(w_2), \mathrm{Im}(w_2), \mathrm{Re}(w_3), \mathrm{Im}(w_3)\big).$$

En $\mathbb{R}^8$ definimos un producto por:

$$\begin{pmatrix} z_1 & \mathbf{w}_1 \\ -\overline{\mathbf{w}_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & \mathbf{w}_2 \\ -\overline{\mathbf{w}_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 z_2 - \left\langle \mathbf{w}_1 \middle| \overline{\mathbf{w}_2} \right\rangle & z_1 \mathbf{w}_2 + \overline{z_2} \mathbf{w}_1 + \overline{\mathbf{w}_1} \times \overline{\mathbf{w}_2} \\ -\overline{z_1}\, \overline{\mathbf{w}_2} - z_2 \overline{\mathbf{w}_1} - \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 & \overline{z_1}\, \overline{z_2} - \left\langle \overline{\mathbf{w}_1} \middle| \mathbf{w}_2 \right\rangle \end{pmatrix}$$

donde, para vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$,

$$\left\langle \mathbf{u} \middle| \mathbf{v} \right\rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

y

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \big(u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1\big)$$

El producto así definido en $\mathbb{R}^8$ es bilineal, tiene unidad $\mathbf{1} = (1,0,0,0,0,0,0,0)$, no es conmutativo y no es asociativo, aunque verifica las identidades $\mathbf{a}^2\mathbf{b} = \mathbf{a}(\mathbf{ab})$ y $\mathbf{ba}^2 = (\mathbf{ba})\mathbf{a}$ para todos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^8$. Un álgebra en la que el producto verifica estas identidades se dice que es un **álgebra alternativa**. Además se verifica que

$$\begin{pmatrix} z & \mathbf{w} \\ -\overline{\mathbf{w}} & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z} & -\mathbf{w} \\ \overline{\mathbf{w}} & z \end{pmatrix} = \big(z\overline{z} + \left\langle \mathbf{w} \middle| \overline{\mathbf{w}} \right\rangle\big)\mathbf{1}$$

de donde se sigue que es un álgebra de división. Dicha álgebra se llama álgebra de los **octoniones** de Cayley y es un álgebra real de división de dimensión 8 que se representa por $\mathbb{O}$. Tenemos, pues, cuatro álgebras reales de división, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (con el producto complejo), $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$, de dimensiones respectivas 1, 2, 4 y 8. La pregunta es obligada ¿hay más álgebras reales de división? La respuesta la dieron F.G. Frobenius (1878) y M. Zorn (1930) probando que, salvo isomorfismos, no hay más álgebras reales de división alternativas de dimensión finita que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$. Otro resultado definitivo fue demostrado por R. Bott y J. Milnor (1958) probando que solamente es posible definir una estructura de álgebra de división en $\mathbb{R}^n$ para los valores $n = 1, 2, 4, 8$.

Referencias

[1] John L. Bell. *The Continuous, the Discrete and the Infinitesimal in Philosophy and Mathematics*. The Western Otario Series in Philosophy of Science Volume 82. Springer Nature Switzerland AG 2019. 2, 7

[2] F. Bombal. *Matemáticas y Ciencia*. Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp) Vol. 103, Nº. 2, pp 279-295, 2009. 7

[3] H. D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher et al. Numbers. Graduate Texts in Mathematics 123. Springer, New York, 1991. 1

[4] M. Kline. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Vols. 1, 2 y 3. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1992. 1, 9, 25

[5] Michael Spivak. *Cálculo Infinitesimal*. Reverté Ediciones S.A., México D.F., 2ªed. - 3ª Reimpresión edition, 1996. 24

[6] H. Wussing. *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI de España Editores, S.A., Madrid 1998. 10